Bulletin of Toyohashi Sozo Junior College
2006, No. 23, 13–18

研究ノート

ゲームの理論

今　井　久　登

1．はじめに

私たちの日常の生活の中で，私たちは消費者として行動する．またそのための所得を得るために企業で働くこともある．経済学では消費者や企業の行動を分析するために制約条件つきの最適化モデルとともにゲームの理論をその手法として用いる．

ここではゲームの理論のおおよその内容を要約したい．これは参考文献を基にした筆者の教材研究であるが，更なる改善のもととしたい．

2．Nash均衡

ここではNash（1951）に基づいてゲームの均衡点（Nash均衡）を定義する．von NeumannとMorgenstern は彼らの著書 Theory of Games and Economic Behaviorの中で2人ゼロ和ゲームの理論を展開した．この本はn人協力ゲームの理論も入っている．協力ゲームの理論はゲームのプレイヤーが形成する様々の結託の相互作用の分析に基づいている．しかしここでの私たちの理論はこのような結託が存在しないことに基づいている．つまり各プレイヤーが他のプレイヤーと意思疎通をもたずに独立に行動することを仮定している．均衡点という概念は私たちの理論の中で重要な要素である．この概念は2人ゼロ和ゲームの解を一般化したものである．まず私たちは重要な概念を定義し，標準的な言葉と記号を準備する．ここでゲームが非協力的であることは明示的というよりも暗示的である．私たちにとってn人ゲームとは各プレイヤーが純粋戦略の有限集合をもつn人のプレイヤーの集合である．そして各プレイヤーiがペイオフ関数p_iと対応している．このペイオフ関数はすべての純粋戦略のn個の組み合わせの集合から実数への写像である．ここで私たちがn個の組み合わせというのは各項目が各プレイヤーと結びついているn個の項目の集合である．ここでプレイヤーiの混合戦略とは和が1であり，そのプレイヤーの純粋戦略と1対1で対応しているマイナスでない数の集まりである．私たちは$s_i = \sum c_{i\alpha} \pi_{i\alpha}$を$c_{i\alpha} \geq 0$と$\sum c_{i\alpha} = 1$とともにそのような混合戦略を示すのに使う．ただしここで$\pi_{i\alpha}$はプレイヤーiの純粋戦略である．私たちはs_iをその頂点が$\pi_{i\alpha}$であるsimplexの中の点であると考える．このsimplexはベクトル空間の凸部分集合であり，プレイヤーiの混合戦略を示す線形結合の集合である．私たちは添え字i，j，kでプレイヤーを示し，α，βでプレイヤーの純粋戦略を示す．記号s_i，t_iなどは混合戦略を示

す．$\pi_i\alpha$はi番目のプレイヤーのα番目の純粋戦略を示す．純粋戦略について定義されたペイオフ関数p_iを混合戦略のn個の組み合わせについて拡張して定義する．そしてこれもp_iで示し，$p_i\left(s_1,\cdots,s_n\right)$と書く．私たちは$s$を混合戦略の$n$個の組み合わせとする．そしてもし$s=\left(s_1,\cdots,s_n\right)$であれば$p_i(s)$は$p_i\left(s_1,\cdots,s_n\right)$を意味する．このような$n$個の組み合わせ$s$はベクトル空間の中の点であり，そのベクトル空間は混合戦略を含むベクトル空間の積空間である．そしてそのようなn個の組み合わせのすべての集合は凸であり，混合戦略を示すsimplexの積である．便宜上私たちは記号$(s;t_i)$を$\left(s_1,\cdots,s_{i-1},t_i,s_{i+1},\cdots,s_n\right)$を示すのに使う．ただしここで$s=\left(s_1,\cdots,s_n\right)$である．もし各$i$について$p_i(s)=$すべての$r_i$について$\max p_i\left(s;r_i\right)$であればこのような$n$個の組み合わせ$s$は均衡点（Nash均衡）である．したがって均衡点はもし他のプレイヤーが戦略を変えないときには各プレイヤーの混合戦略がそのプレイヤーのペイオフを最大にするn個の組み合わせsである．したがってこのとき各プレイヤーの戦略は他のプレイヤーの戦略に対して最適である．私たちはn個の組み合わせsの空間からそれ自体への写像Tの不動点がゲームの均衡点となるような写像Tをつくり，均衡点の存在を証明することができる．

3．繰り返しゲーム

ここでは主にKandori（2003）に基づいて繰り返しゲームについて考える．ここで繰り返しゲームとは各プレイヤーが同時に戦略を決定するゲームを段階ゲームとし，それを何回も繰り返して行うゲームである．ゲームがパレート改善の余地のあるNash均衡を持つ場合を囚人のジレンマのゲームであるという．各プレイヤーの割引率δが1に近い場合には各プレイヤーが十分辛抱強い．このとき繰り返しゲームのNash均衡が段階ゲームでは実現できない協力解を実現することがある．このことをフォーク定理という．しかしフォーク定理は有限の繰り返しゲームの後ろ向き帰納法からは出てこない．Fudenberg, Levine and Maskin（1994）は不完全情報下でのフォーク定理について検討している．Fudenberg, Levine and Maskin（1994）は長期的な関係を考えており，そこではプレイヤーが何らかのシグナルを公的に観察できる．そしてその確率分布は彼らが観察できない行動によって影響を受ける．そのような状況でシグナルがありうる行動の数に対して十分多くの値をとりうる場合に実現可能で個人合理的な結論が得られる．しかし，不十分な情報しか利用できないときにはあてはまらない．たとえばシグナルが成功または失敗という場合である．さらにより厄介なことには現実にはシグナルの数も行動の数もはっきりわからないことが多い．したがってフォーク定理がシグナルの数が小さい場合に成立するかどうかを検討することは意味がある．そこで私たちはプレイヤーが相互に意思疎通できるときにはシグナルの数が小さくてもフォーク定理が成立することを示したい．特に少なくとも4人のプレイヤーがいる場合にはFudenberg, Levine and Maskin（1994）の条件をはずしてもフォーク定理が成立することを示すことができる．各プレイヤーの段階ゲームのペイオフをその行動と公的シグナルの関数$u_i\left(a_i,\omega\right)$とする．公

的シグナルの確率 $p(\omega|a)$ はその段階のプレイヤー全体の行動aに依存する．そこで各プレイヤーの各段階の期待ペイオフ $g_i(a)\sum u_i p$ およびゲーム全体の期待ペイオフ $(1-\delta)\sum\delta^{\wedge}t^* g_i(a(t))$ が決まる．また各プレイヤーは自分の行動についての私的シグナルm_iを提示する．つまり各期の終わりに各プレイヤーが自分のとった行動を宣言する．私たちはプレイヤーのあるペア (i,j) について一方がうそをついたと思われるとき他方にペイオフを移転することを考える．その判断は公的シグナルとそのペア以外の私的シグナルによる．プレイヤーのペアを無作為抽出することが情報を豊かなものとする．各プレイヤーの私的シグナル $m_i(a_i,\omega)$ はその行動と公的シグナルに依存する．プレイヤーはうそをつくこともできるが均衡では自主的に本当の行動を示すことになる．なぜならまず自分のシグナルが自分のペイオフに影響を与えない場合にはうそをつく積極的な理由がない．次に自分のシグナルが自分のペイオフに影響を与える場合にはうそをついていると判断されて損をすることもある．自分が得をするのは他のプレイヤーがうそをついていると判断される場合だけである．

4．ゲームの展開形

ここではKuhn (1953) と中山幹夫 (1997) に基づいてゲームの展開形について検討する．von Neumann とMorgensternはゲームの理論を定式化して次の2つのことを示した．①どのような非協力ゲームでもモデル化できるプレイヤーの純粋戦略の概念を導入した．②協力ゲームの包括的な特徴を示した．彼らは非協力ゲームをゲームの標準形と展開形で示した．n人非協力ゲームの標準形は純粋戦略のn個の組み合わせで示される．特に2人ゲームの場合にはペイオフ表という行列で示される．ゲームの展開形はゲームの木で示される．ゲームの木は与えられた平面上である始点（rootともいう）から出発していくつかの分岐点をもつ有限の木である．ゲームの標準形は動学的な構造をもたないが，ゲームの展開形は動学的な分析ができる．n人非協力ゲームは次の4つの特徴をもつゲームの木で示される．①ゲームの動きを偶然の動きと各プレイヤーの動きに区分している．②同じプレイの段階で異なる動きをしないゲームの動きの集合を情報集合として一括している．これはそのプレイヤーが情報集合の中のどの点に自分がいるのかわからないことを示す．③偶然の動きを示すときにはそれはある確率分布で示される．④ゲームのプレイの最終的な結果としてn個の数からなるペイオフ関数をもつ．情報集合の中で分岐点から伸びる枝はその情報集合での選択肢である．情報集合が2個以上の分岐点を含んでいるときそこで選択するプレイヤーはこれらの分岐点を区別できない．各プレイヤーは自分の情報集合での選択を確率的に決定できる．これをその情報集合での局所戦略という．各プレイヤーの行動戦略とは自分のすべての情報集合での局所戦略をまとめたものである．各局所戦略がある枝を確率1で選んでいるような行動戦略をゲームの木での純粋戦略という．どの純粋戦略をどの確率で実行するかを示す確率分布を混合戦略という．有限のゲームの木が与えられれば各プレイヤーの純粋戦略を列挙できる．そしてこれをもとにゲームの標準形を構成することができる．したがって

ゲームの標準形にNash均衡があればゲームの展開形にもNash均衡がある．ゲームの標準形にNash均衡があることはNash（1951）がBrouwerの不動点定理を用いて証明している．プレイヤーのあるものが情報を持ち，他のものが持たない状況をどのように分析すればよいのか．Harsanyi（1967, 1968）はこの問題に取り組んでいる．Harsanyi（1967, 1968）によればベイズ均衡とはベイズのルールに従うNash均衡である．ここでベイズのルールとは条件付き確率を求める算法である．またSelten（1965）はサブゲーム均衡の概念を提起した．その後Selten（1975）はサブゲーム均衡を再定義し，完全均衡（摂動均衡）の概念を提起した．ここでサブゲームとはある分岐点から出発するゲームであり，そのゲームの分岐点以外の点を各情報集合に含まないものである．サブゲーム均衡とはプレイヤーが過去のことを忘れても成立するNash均衡である．完全均衡とは撹乱に対して安定なNash均衡である．Nash均衡はサブゲーム均衡，ベイズ均衡，完全均衡の順に絞り込まれていく．

5．Shapley値

ここではShapley（1953）に基づいて協力ゲームについて検討する．ゲームの理論の基礎となるのはゲームのプレイヤーが彼らの効用の基準でプレイの結果として生じる見込みを評価できるという仮定である．ゲームの理論を様々の分野に適応する場合にはゲームをプレイしたときの見込みをもつことを考える必要がある．したがってゲームを評価できるかどうかは決定的に重要である．ゲームの理論がゲームに値を割り当てることができないのであれば比較的に単純な状況しか分析できない．von Neumann とMorgensternの理論ではゲームを評価するのが難しいのは協力ゲームの場合である．そこで私たちは協力ゲームの値を導き出し，その性質を検討したい．私たちは単純で直感的に解釈でき，ゲームの値をただ1つに決めることのできる3つの公理の集合から出発する．私たちのここでの仕事は概念的にはvon NeumannとMorgensternの理論に特性関数の導出に至るまで基づいている．したがって私たちは重要な基礎となる3つの仮定を受け継ぐ．第1は効用が客観的であり，移転できることである．第2はゲームが協力的であるということである．第3はゲームがその特性関数によって示されるということである．私たちはゲームを特定のプレイヤーがゲームをプレイするある位置にあるルールの集合と考える．このようなゲームはプレイヤーによってプレイされるというよりはプレイヤーの役割によってプレイされるものである．Uをプレイヤーの全体集合とする．そしてゲームをUの部分集合から実数への優加法的な集合関数vによって定義する．vのキャリア（carrier，careerではない）とはいかなるUの部分集合Sについても$v(s)=v$（NかつS）となるUの部分集合Nである．このキャリアの概念を使うとプレイヤーの数による通常のゲームの分類が曖昧なものとなる．キャリア以外のプレイヤーはゲームのプレイについて直接の影響をもたない．というのはいかなるプレイヤーの結託（coalition）に対しても何も寄与しないからである．私たちは有限のキャリアを持つゲームについて検討する．$\Pi(U)$をUの順列とする．

つまりこれはUのそれ自体への写像である．πを$\Pi(U)$の要素であり，πSをπのもとでのSの像とすると私たちは関数πvをUの部分集合Sについて$\pi v(\pi S)=v(S)$で定義する．もしvがゲームであればπvもゲームである．ゲームvの値$\phi(v)$で私たちはUの要素iから実数$\phi_i(v)$への関数を示す．そしてこの関数は次の3つの公理をみたす．第1の公理は$\Pi(U)$の各πについて$\phi\pi_i(\pi v)=\phi_i(v)$である．これはゲームの値が協力ゲームの重要な要素であることを意味する．第2の公理はvの各キャリアNについて$\sum N\phi_i(v)=(v)(N)$である．これはゲームの値がゲームの配分を示すことを意味する．第3の公理は2つのゲームvとwについて$\phi(v+w)=\phi(v)+\phi(w)$である．これは2つの独立したゲームが組み合わさるとそれらの値がプレイヤーごとに加算されることを意味する．有限のキャリアをもつゲームについて以上の3つの公理をみたすただ1つの関数ϕが存在することをShapley（1953）が証明している．この値をShapley値という．

6．ネットワークのゲーム

私たちはBala and Goyal（2000）に基づいて各経済主体がコストのかかるリンクを形成することで他の経済主体から便益を得る状況を考える．私たちの焦点はライバルにはならない便益にある．私たちは各経済主体がその経済主体の形成するリンクによって便益を得られることを考える．したがって個々のリンクはプラスの外部効果をもち，その価値は間接的なリンクに伴う遅れのレベルに依存する．私たちのアプローチの特徴はリンクを形成するコストがリンクを形成する経済主体によってのみ負担されることである．このことが私たちにネットワーク形成のプロセスを非協力ゲームとしてモデル化することを可能にする．そこでは各経済主体の戦略はその経済主体がどの経済主体とリンクを形成するかである．各経済主体によって形成されたリンクが社会的なネットワークとなる．私たちは便益の流れが一方向と双方向の2つの場合を考える．前者の場合には経済主体iが経済主体jと形成するリンクは経済主体iにとってのみ便益を生み出す．後者の場合には便益が両方の経済主体に生じる．基準となるモデルでは経済主体の間の便益の流れに遅れがないものとする．つまりもし経済主体iが経済主体jと一連の仲介者によって結びつく場合にiがjから得る便益は仲介者の数に影響されない．このこととは別に各経済主体のペイオフはアクセスをもつ他の経済主体の数とともに増大し，形成するリンクの数とともに減少すると仮定する．ただし便益の流れに遅れが生じる場合にはその便益の価値は遅れの水準に応じて減少する．Nash均衡のネットワークは形成される場合も空である場合もある．便益の流れが一方向の基準となるモデルではNash均衡のネットワークは車輪型か空かである．便益の流れが双方向の基準となるモデルではNash均衡のネットワークは1つのセンターが出資する星型か空かである．リンクの数に応じて遅れが生じる場合にはNash均衡のネットワークは必ず形成される．遅れのある場合には経済主体の間の距離が関連をもつのでネットワークの構造全体が検討されなければならない．便益の流れが一方向の場合にはNash均衡のネットワークは花型になる．便益の流れが双方向の場合

にはNash均衡のネットワークは複数のセンターが出資する複数の星型になる．以上の議論をまとめると次のようになる．潜在的な便益が広く分散している場合にはこれらの便益にアクセスしようとする経済主体の努力がNash均衡のネットワークを形成することになる．そしてこのNash均衡のネットワークは比較的に単純な形態をとる．さらに多くの場合にこれらのネットワークは効率的である．以上の議論はネットワークの形成の理論への1つの貢献である．コンピュータ・サイエンス，オペレイションズ・リサーチ，社会学と同じように経済学でもネットワークを対象とする多くの研究がある．これらの多くのものは異なるネットワークの構造の効率性に関するものであり，プランナーの観点を取る．これに対して私たちはネットワークの形成を各経済主体の動機付けの観点から検討した．

参考文献

Bala, V. and S.Goyal 2000, A Noncooperative Model of Network Formation, Econometrica, Vol.68, No.5.

Kandori, M. 2003, Randomization, Communication, and Efficiency in Repeated Games with Imperfect Public Monitoring, Econometrica, Vol.71, No.1.

Kuhn, H.W. 1953, Extensive Games and the Problem of Information, Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press.

中山幹夫　1997，はじめてのゲーム理論，有斐閣．

Nash, J. 1951, Non-Cooperative Games, Annals of Mathematics Journal, 54.

Shapley, L.S. 1953, A Value of n-Person Games, Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press.