

## ナラ枯れ被害量推定モデルの有効性について

稲田 充 男

稲田 (1993a, 1993b, 1994, 2009) は、カーマックとマッケンドリックの流行病モデルを応用し、松くい虫被害量推移モデルを導き、その適合性ならびに予測性について検討してきた。本論では、松くい虫被害量予測で培った各種モデルを、最近問題になっているナラ枯れ被害に適用し、その有効性について検討した。

キーワード：流行病モデル，ナラ枯れ，カーブフィッティング

### はじめに

国連は2011年を「国際森林年」と定め、私たち人類にとっての森林がいかに重要であることを強調した。その重要であるべき森林が、微生物や昆虫などにより被害を受けている。1970年代後半からマツ枯れが激増した。最近では、コナラ、ミズナラなどの集団枯死（通称「ナラ枯れ」）が目立つようになり、毎年被害地域が拡大している。「ナラ枯れ」被害について、「平成22年度森林・林業白書」に次のように記載されている。

「ナラ枯れ」はカシノナガキクイムシがナラ・カシ類等の幹にせん入して、体に付着した「ナラ菌」を樹体内に多量に持ち込むことにより、ナラ・カシ類の樹木が集団的に枯死する現象であり、樹木の伝染病である。文献で確認できる最古のナラ枯れ被害は、昭和初頭（1930年代）の宮崎県と鹿児島県での被害である。全国のナラ枯れ被害量は、平成14（2002）年度以降、特に増加しており、平成21（2009）年度は材積で23万 m<sup>3</sup>となっている。最近のナラ枯れ被害は、本州の日本海側を中心に発生している。平成22（2010）年度には、東京都（八丈島、御蔵島、三宅島）、青森県、岩手県、群馬県、静岡県5都県で新たな被害が発生したほか、奈良県では10年ぶりに発生し、被害地域は29都府県にまで拡大している。

稲田 (1993a, 1993b, 1994, 2009) は、カーマックとマッケンドリックが1905年12月17日から1906年7月21日の約7ヵ月、インドのボンベイで流行したペストによる死亡者数のデータにあてはめた流行病モデルを応用し、松くい虫被害量推移モデルを導き、その適合性ならびに予測性について検討してきた。本論では、ナラ枯れ被害にも、松くい虫被害と同様にこの被害量推移モデルが適用できることを示す。

これまで、松くい虫被害やナラ枯れ被害については、あえて文献を列挙するまでもなく、その被害発生メカニズムや防除手法に関する研究は数多くなされてきた。一方、被害量予測に関する研究は上記の研究以外ほとんど見られない。しかし、被害量が的確に予測できなけ

れば、薬剤散布や薬剤注入などの防除対策効果を数量面で評価することはできない。的確な予測量は効果判定の重要な指標となり、林野行政にとって有用な情報となる。その意味において、適合性ならびに予測性に優れたモデルの開発は必須課題である。

## 1. カーマック・マッケンドリックの流行病モデルとその近似解

本節では、カーマック・マッケンドリックの流行病モデルとその近似解について、佐藤(1991)の説明を引用し紹介する。ただし、式の番号は本文に合わせて変更してある。また、不要部分は一部省略してある。

ある地域に住む  $n$  人の集団を考える。その地域の住民は他の地域の住民と全く交流せず、その地域のなかだけで、お互いが均等に交流しているものとする。また、住民の出生、自然死、他地域への移住などもいっさい考えないことにする。したがって、全住民数  $n$  は一定であるとしてよい。

つぎに、住民は感染者、感受性者からなる二つのグループの他に、除去者からなる第三のグループに分けられているものとしよう。ただし、除去者とは、病気に感染して死亡した者、回復して免疫をもつ者、免疫をもつまでその地域から隔離されている者などをいう。

さらに、その病気に感染すると予感受性者はただちに感染者に変わるものと仮定しよう。これは潜時をまったく無視するということである。ここで潜時とは、感染後、病原菌が宿主の体内で増殖し、やがて体外へ排出されるまでの期間をいう。これは、いわゆる潜伏期とはちがうので、区別したほうがよい。

さて、ある時期  $t$  の感受性者を  $x(t)$ 、感染者を  $y(t)$ 、除去者数を  $z(t)$  であらわし、これらの関数はいずれも  $t$  について微分可能であると仮定する。このとき

$$[1] \quad x + y + z = n$$

である。

いま、感受性者数の変化率は  $x$  と  $y$  の積に比例すること、除去者数の変化率は  $y$  に比例すること、および除去者は  $y$  に比例して一定の割合で感染者のグループから除かれること、などを仮定する。すると、これらの仮定より、次の一組の微分方程式をえる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta xy \\ [2] \quad \frac{dy}{dt} &= \beta xy - \gamma y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma y \end{aligned}$$

ただし、 $\beta$  は感染率（または接触率）、 $\gamma$  は除去率とよばれ、いずれも正の定数である。微分方程式系 [2] はカーマック・マッケンドリックの流行病のモデルとよばれている。

[2] の第一式を第三式でわれば

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\beta}{\gamma}x = -\frac{x}{\rho}$$

$$\text{ただし, } \rho = \frac{\gamma}{\beta}$$

をえる,  $x$  を  $z$  の関数とみてこの微分方程式を解けば

$$[3] \quad x(z) = x_0 \exp(-z/\rho)$$

をえる. 一方, [1] より

$$y = n - z - x$$

これを [2] の第三式の右辺に代入し, この  $x$  にさきほど求めた  $x(z)$  を代入すれば,

$$[4] \quad \frac{dz}{dt} = \gamma[n - z - x_0 \exp(-z/\rho)]$$

をえる. ところが, この微分方程式の解を具体的にあらわすことはむずかしい. そこで近似解を求める.

伝染病の流行がそれほど激しくないとき, 住民の交流から除去される者の数  $z$  は小さい数であるとみてよい. また,  $1/\rho$  は一般にかなり小さな数になるから,  $z/\rho$  は相対的に小さな数であると考えられる. したがって, テイラーの公式により  $\exp(-z/\rho)$  を展開し, [4] の右辺に代入し, 整理し定数をまとめると,

$$[5] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma x_0}{2\rho^2} [A^2 - (z - B)^2]$$

となる. ただし

$$A = \frac{\rho^2}{x_0} \sqrt{\left(\frac{x_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2x_0(n - x_0)}{\rho^2}}, \quad B = \frac{\rho^2}{x_0} \left(\frac{x_0}{\rho} - 1\right)$$

である.

この微分方程式は, これは変数分離型であり, 未定係数法を用い, 部分分数に分解し解くことができ,

$$[6] \quad z(t) = \frac{\rho^2}{x_0} \left[ \left( \frac{x_0}{\rho} - 1 \right) + \lambda \tanh \left( \frac{\gamma \lambda}{2} t - \mu \right) \right]$$

$$\text{ただし, } \lambda = \sqrt{\left(\frac{x_0}{\rho} - 1\right)^2 + \frac{2x_0(n - x_0)}{\rho^2}}, \quad \mu = \tanh^{-1} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{x_0}{\rho} - 1\right)$$

をえる. この [6] がモデル [2] の  $z(t)$  の近似解である.

## 2. 被害量推移モデル (原型モデル)

公衆衛生統計では [6] の近似解をそのまま用いず、増加率の形で用いる。すなわち、 $z$  の導関数  $\frac{dz}{dt}$  として定義される流行曲線を用いる。[6] の近似解より流行曲線を求めると、

$$[7] \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma\rho^2\lambda^2}{2x_0} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma\lambda}{\rho} t - \mu\right)$$

をえる。ここで、 $M = \frac{\gamma\rho^2\lambda^2}{2x_0}$ 、 $k = \frac{\gamma\lambda}{\rho}$  とおき、[7] を整理し、

$$[8] \quad f(t) = \frac{dz}{dt} = M \operatorname{sech}^2(kt - \mu)$$

として用いる。

上記の流行曲線が導かれた過程はそのまま被害量推移モデルに適用でき、 $x(t)$  を健全木量、 $y(t)$  を被害木量、 $z(t)$  を被害木の中から枯死・伐採除去等により確認された被害量と解釈すれば、[8] は被害量推移モデルそのものである。[8] のパラメータ  $\mu$  の性格を明確にするために、 $\mu = k\tau$  とおくと、

$$[9] \quad f(t) = M \operatorname{sech}^2[k(t - \tau)]$$

となり、これが被害量推移モデル (原型) である。ここで、 $f(t)$  は被害量、 $M$  は被害量の最大値、 $\tau$  は被害量が最大になる時刻、 $k$  は被害量の増加速度にかかわるパラメータである。本論では、この [9] を原型モデルと呼び、それぞれの単位を  $f(t)$ 、 $M$ :  $\text{m}^3/\text{年}$ 、 $\tau$ : 年、 $k$ :  $\text{年}^{-1}$  とする。

この原型モデルを「平成22年度森林・林業白書」記載の2001年から2011年の全国ナラ枯れ被害量 (被害材積) に対してあてはめると、[10]、図1のようになる。

$$[10] \quad f(t) = 4.037 \times 10^7 \operatorname{sech}^2[0.1508(t - 2062)]$$

(相関係数=0.941)

ただし、被害量  $f(t)$  の単位は [万  $\text{m}^3/\text{年}$ ] である。また、図中、○は調査結果、曲線はあてはめたモデルによる推定結果である。なお、本論文では非線形最小二乗法として、シンプレックス法によるパラメータ推定を行った。シンプレックス法は収束速度が遅いが極小点の周りの収束領域が比較的広いので、この手法を用いた。

図1および被害量の実測値と推定値の相関係数が示すように、調査結果が示す被害の推移状況を原型モデルは十分表現していると判断できる。2001年から2011年にかけての全国ナラ枯れ被害量の推移状況は松くい虫の初期の被害状況に酷似している。なお、あてはめ結果から被害量の推移を予測すると、2062年頃まで増加し、その後減少すると考えられるが、これはあくまでも初期被害発生状況からの予測結果であり、将来予測としては不確定な要素が多い。

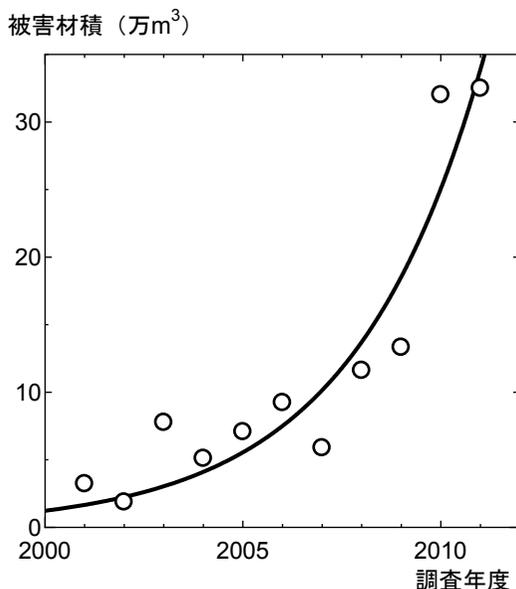


図1 全国のナラ枯れ被害量の推移と原型モデルあてはめ結果

ここで示した原形モデルは、いわゆる「ピーク曲線」であり、あてはめ計算に用いる資料そのものがピークを示すようなものであれば、それより計算される曲線式は、数年におよぶ比較的長期予測が可能であるが、被害の初期段階では十分な予測はできない。上記あてはめ結果が示すように、調査結果が示す被害の推移状況をこれらのモデルは十分表現しているものと考えられるが、現段階の資料数ではこれ以上のことは言及できない。原型モデルは地域を限定し、その中で被害発生から収束までの状況を表現するために導かれたものであり、被害量のピーク量ならびにその時期については、さらに情報を集める必要がある。今後、この被害に関する調査結果が順次出されて来た段階で、さらに検討を加えたいと考えている。

### 3. 原型モデルの重ね合わせ（重畳モデル）

本節では、新潟県治山課緑化係報告の新潟県全域のナラ枯れ被害の推移についてみる。図2は新潟県全域の被害量の推移状況（被害本数）を示すもので、図中、○は1998年～2006年の調査結果、●は2007年～2011年の調査結果、波線は1998年～2006年の調査結果に対して原型モデルあてはめた結果は

$$[11] \quad f(t) = 107.7 \operatorname{sech}^2[0.5343(t - 2004)]$$

である。ただし、被害量 $f(t)$ の単位は[本/年]である。

明らかに、原型モデル [11] は1998年～2006年の推移状況を的確に表現しているが、2007年～2011年の状況をまったく表してはいない。

新潟県治山課緑化係によると、「新潟県のカシノナガキクイムシによるナラ類の枯損は、

昭和63年に旧東頸城郡で被害が確認され、平成14年度に阿賀町を中心に急激に拡大し、平成16年度には10万本を超えた。その後、被害の受けやすいミズナラの大径木が枯死したこともあり、一時減少したが、再び増加傾向に転じ、平成22年度には11万4千本と過去最大の被害となった」と報告されている。原型モデルは地域を限定しその中で被害発生から収束までの状況を表現するために導かれたものであり、被害発生・収束が複数回考えられる状況には、単純な原型モデルでは対応できない。このような場合には、原型モデルの重ね合わせが必要と考えられる。被害の発生・収束ごとに原型モデルを重ね合わせた

$$[12] \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots$$

$$\text{ただし, } f_1(t) = M_1 \operatorname{sech}^2[k_1(t - \tau_1)], \quad f_2(t) = M_2 \operatorname{sech}^2[k_2(t - \tau_2)], \quad \dots$$

を適応する必要がある。本論では [12] を重畳モデルと呼ぶことにする。この重畳モデルを鳥根県全域の被害量の推移にあてはめた結果は

$$[13] \quad f(t) = 105.6 \operatorname{sech}^2[0.5201(t - 2004)] + 106.8 \operatorname{sech}^2[0.6103(t - 2009)]$$

(相関係数=0.922)

で、図3にその様子を示す。図中、○は調査結果、実線はあてはめた重畳モデルによる推定結果で、波線および短波線は重畳モデルの基となった各原型モデルの値である。図3や実測値と推定値の相関係数が示すように、調査結果が示す被害の推移状況を重畳モデルは表現しているものと判断できる。

ここでは重畳モデルの基となる原型モデルを二つ重ねたが、本来ならば原型モデルをどれ

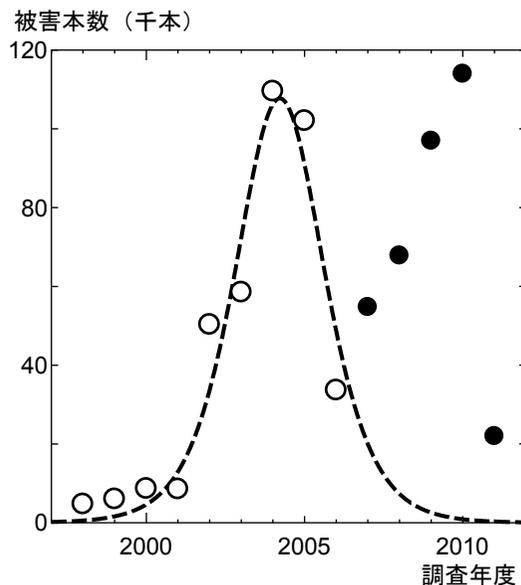


図2 新潟県全域のナラ枯れ被害量の推移と原型モデルあてはめ結果

だけ重ねればよいか検討する必要がある。ただ、ナラ枯れ被害は松くい虫被害に比べると比較的新しいものであり、被害の発生・収束が数多く繰り返されているとは考えにくい。当分は原型モデルを二つ重ねた重畳モデルで十分であると思われるが、将来的には、松くい虫被害と同様、さらに多くの原形モデルを重ねる必要も出てこよう。原形モデルをどれだけ重ねるかは、モデルの適応目的・利用方法に大きく依存し、被害の推移状況への適合性のみを追求するならば重ね合わせる原型モデルの数は多くなる。一方、被害の推移状況より中軸となる主要な被害発生・収束過程に分解し被害のメカニズムを分析するならば、重ね合わせる原形モデルの数は限定されよう。

#### 4. 重畳モデルへのベースラインの付加（重畳基底モデル）

松くい虫被害量推移モデルでは、加害虫が絶滅することがない限り存在するであろう、被害量が0ではない下限（ベースライン）を考慮し、重畳モデル [12] にベースラインを表す関数を付け加えたモデルを考えた。下限を表す定数パラメータ  $C$  を付加した、このモデルを重畳基底モデルと呼び、次式で表す。

$$[14] \quad f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + C$$

$$\text{ただし, } f_1(t) = M_1 \operatorname{sech}^2[k_1(t - \tau_1)], \quad f_2(t) = M_2 \operatorname{sech}^2[k_2(t - \tau_2)], \quad \dots$$

$C$  は下限を表す定数

この [14] が本論で提案する最も一般的な被害量推移モデルである。新たに導入したベー

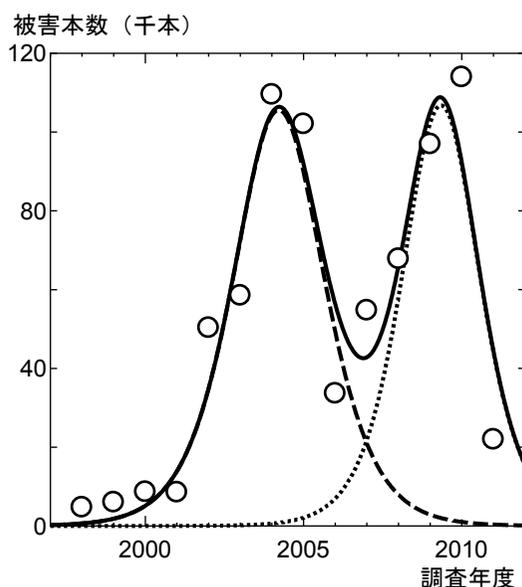


図3 新潟県全域のナラ枯れ被害量の推移と重畳モデルあてはめ結果

スライン  $C$  の値は、全国の被害量の下限値として理解するならば、森林資源の適切な管理・経営の観点から、下限値をどのように制御するか、その判断材料として、また、薬剤散布などの効果を評価する基礎資料として、意味を持つものと思われる。ただ、ナラ枯れ被害については、前述の通り被害量に関する情報も少なく、この重畳基底モデルを用いる段階には至っていない。よって、ここではモデルの形の紹介のみにとどめる。

## おわりに

ナラ枯れ被害量の推移について、カーマック・マッケンドリックの流行曲線モデルを応用し誘導した一連の松くい虫被害量推移モデルを適応することにより、その傾向をうまく表現できることについて報告した。特に用いる資料により、原型モデル [9]、重畳モデル [12] とその形を変えることにより、よりの確にその傾向を表現できることを示した。

原型モデルは、連立微分方程式を導いた仮定からもわかるように、ある一定のメカニズムで起こる被害の発生・収束過程を表現する。重畳モデルは中軸となる主要な被害発生・収束過程に分解し、推移状況を解析する。さらに、重畳基底モデルは被害の下限量を特定する。それぞれのモデルの特徴を考慮し、適応事例を増やしながら、モデルの構造改良を検討するのが今後の課題である。

本論では、モデルのあてはまりの程度を実測値とモデル推定値の図示と、実測値と推定値との相関係数で見えてきた。もちろんこれら以外にも、データのあてはまりのよさを数値で表す各種の情報量がある。本論で用いた非線形最小二乗法ならば「二乗平均平方根」（「平均二乗偏差」や「平均二乗誤差」とも呼ばれる）が考えられる。しかし、二乗平均平方根は複数のモデルより最良のモデルを選択する指標としては有用であるが、値そのもので新たに構築したモデルが有効であるかどうか評価することは難しい。よって、ここでは非常に単純な上記の方法で評価した。上記の事例では相関係数がともに0.9以上であり、決定係数に直すと0.8以上である。モデル構築段階での評価としてはこれで十分と考える。ただし、今後は重畳モデルの最適なパラメータ数の決定など、モデル選択についても考えなければならない。その際は、相関係数の値や二乗平均平方根の値の大小だけでなく、モデルのパラメータ数も考慮した情報量、AIC などを用いて検討する予定である。

## 引用文献

- 稲田充男1993a. 松くい虫被害量推移モデルの誘導. 日林関西支論 2: 45-46.  
稲田充男1993b. 松くい虫被害量推移モデルの誘導とその適合性. 島大農研報 27: 1-6.  
稲田充男1994. 松くい虫被害量推移モデルによる被害量予測. 日林関西支論 3: 29-32.  
稲田充男2009. 松くい虫被害量推移モデルの有効性について. FORMATH Vol.8: 165-177.  
佐藤總夫1987. 自然の数理と社会の数理: 微分方程式で解析する II. 日本評論社, 東京.  
林野庁2011. 森林・林業白書(平成23年4月26日公表) 第1部第III章第2節, 69-70.  
[http://www.rinya.maff.go.jp/j/kikaku/hakusyo/22hakusyo\\_h/all/h30.html](http://www.rinya.maff.go.jp/j/kikaku/hakusyo/22hakusyo_h/all/h30.html) (2011/7/1 アクセス)