Bulletin of Toyohashi Sozo College
1999, No. 3, 165–178

特集　「異分野」理解のすすめ

頭を柔らかくする数学

小 島　　誠

1. 数学は暗記科目か

「数学」と聞いて人々の頭にはどんな思いが浮かぶのだろうか．昔も今も，小学生の間は算数が好きだったが，中学，高校に進むにしたがってだんだん理解しにくくなり，数学が苦手な科目になっていくという人が多いように思われる．本来，じっくり十分に考える時間が与えられれば，数学は誰にでも理解できるはずのものではないかと思う．近年とくに教育の場で問題になるのは先を急ぎすぎることではないだろうか．短時間に答えを出すことを要求して，そのためのパターン化を進めたりしている．そして，問題の作成も思考力を見るためよりも採点を楽にするための解答選択方式が主流になってしまって， じっくり考えさせる環境を奪ってしまっている．もちろん答えが正しいことは大事なことではあるが，その正解にたどりつくまでの思考方法の方がもっと大切なことだと思う．途中の論理過程を無視して，結果さえよければそれで良しとする風潮はかなりまん延していて，学生から「答えは合っているからいいんじゃないですか」と苦情を言われたりする．

- 一例を挙げる．

不等式　　$\sqrt{x+1} < x-1$　　(1)

を解けという問題に対して，

両辺を2乗して　　$x+1 < x^2 - 2x + 1$　　(2)

移項をして　　$x^2 > 3x$　　(3)

xで割って　　$x > 3$　　(4)

簡単な例なので，誤りが2箇所あることがすぐ分かる (4. 補遺　無理不等式について　を参照)．最後の結果(4)だけを見ると正解である．私がつねづね学生に言っているのは「偶数回の間違いをして，結果がたまたま合ったんだね」と．論理的な間違いを偶数回すると偶然にもその結果が正解に一致することがあるのである．解答選択方式ではこういう間違った解答も正解と判断してしまうし，間違った思考を修正するチャンスを失ってしまう．

問題をパターン化し，解法を暗記するのが数学だと思うようになったら，考えるという訓練を放棄して，その頭を固くしてしまうもの以外の何物でもない．数学だけの問題ではない

と思うのだが，最近の若者の多くは大変頭が固くなって，自分の考えで自分の意見を述べる力が衰えているのではないか．

● 1つの問題の解答を普通の記述式で求めると，正解の表現も必ずしも1通りではないし，誤答のパターンに至っては百人百様で何通りもの間違い方がでてくる（4. 補遺　誤答のパターンを参照）．解答選択方式で4個とか，5個の解答らしきものの中から1つを選択させるとか，センター試験のように正解の形を見せてその枠の中に記号などを記入させるというのでは，記述式ならば気づかない自分の誤りに気づいてしまうという一種のヒントを与えていることにもなる．また，なにも考えなくて白紙ですます所を，偶然にも正解を選んでしまうこともある．

与えられた問題の正解とか，結果を得ることにもまして，そこに至るまでの紆余曲折の思考，発見の過程などを積み重ねての試行錯誤を経験することが，人生で直面するいろんな場面での問題解決の可能性を広げてくれるものと思う．

私が大学をでて，しばらく高校で教えたときの何人かの生徒たちが，後年つぎのようなことを話してくれた．当時，黒板に書かれた生徒たちの解答を見て「これとやり方の違う解答の人はいないか」と言って，何通りもの解答がでた．それが大変楽しかったという．自分の考えたことが間違っていなかったということと，それを認められたということ，また，ほかにもいろいろな方法があるんだということが分かったりして，良かったのだということである．

● 数学には定理や公式がある．これらを暗記して利用するだけの勉強でなく，その証明の過程を知ることが重要である．これが他の問題を解くための大きなヒントになり，応用が効くようになるものである．1つの定理の証明には普通何通りもの証明方法がある．ピタゴラスの定理は360通り以上もの異なる証明が知られている．かのガウスは代数学の基本定理を証明したが，自身4通りの証明をしているし，整数論の平方剰余の定理に至っては100通り以上もの証明をしたということである．

これは麓から1つの山の頂上をめざして登るのに例えられると思う．幾通りもの登山路があって，その1つを自分で発見したり，ルート開拓をするのと似ている．山は写真やテレビで見ているだけでなく，いろいろなルートで自分で登らなければ，その山のもつきびしさとか，楽しさ，大きさなどが分からない．そして，登るたびに周囲の風景などもちがった側面を見せてくれるものである．定理や公式を暗記するだけというのは，写真やテレビで山を見ているだけというのと同じである．

数学の本質はその自由な思考にあることを思うと現在の学校教育は大変残念な状況になっているのではないかと思う．

2. 頭を柔らかく

大学までの数学の内容は計算に偏っているのが現状である．代数学での方程式の解法，微分積分学での各種計算，確率論，そして幾何学も解析幾何学で計算が多い．ユークリッドの初等幾何学での論証は頭の訓練に非常によいと思うのだが，受験数学などのために教育の場

からはじき出されてしまった．そのユークリッド幾何学よりもっと柔らかい幾何学でトポロジー（位相幾何学）というのがあり，これを中心にして頭を柔らかくすることが出来るかどうかに挑戦をしてみよう．

2.1 角の 3 等分

手始めにユークリッド幾何学の問題で，「角の3等分はできるか？」について．問題はつぎのような意味である．

任意に与えられた角を定規とコンパスで 3 等分できるか

で，定規とは直線をひくためだけの道具であり，コンパスとはある点を中心としてある半径の円を描くための道具である．ユークリッド幾何学での図形を描く（作図の）ための道具はこの 2 つだけが認められている．ギリシャ時代からの難問の 1 つ．

角の 2 等分は簡単である．右図を参照．
$OA = OB$，$AC = BC$として，OCが角 POQを 2 等分する直線である．

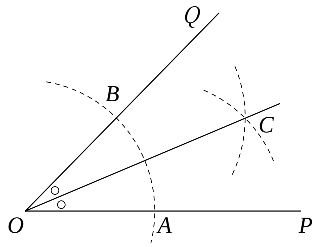


図 1

直角の 3 等分はどうか．右図を参照．
$OA = OB = AD = BC$として，
$\triangle OAD$，$\triangle OBC$が正三角形
したがって，$\angle AOC = \angle COD$
$= \angle BOD = 30°$

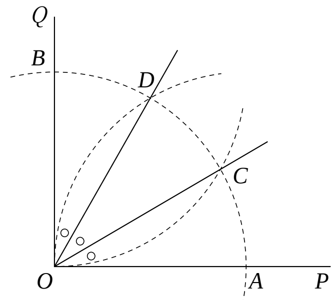


図 2

角の2等分とか，特別な角の3等分はできるのだが，任意の角の3等分は不可能であることが，2000 年以上もかけて，1837 年に証明をされた．代数方程式のガロア理論（1830）を利用して，ワンツェル（P.L. Wantzel 1814–48）が証明した．だから誰がどんなに努力をしてももう無駄ですよ，ということになった訳である．ただし，ユークリッド幾何学の中ではということである．

では，どんなことをしても角の 3 等分はできないのか？　というと，さにあらずで，どういう状況の中で問題を考えているかによって，必ずしもそうではないのである．道具として定規とコンパス以外の何かが使えたらどうか？　右図のような定規を使えば，2000年以上も

つづいた難問も解決してしまう．これでどんな角も３等分が出来てしまう．日本にはこれと同じ曲尺（かねじゃく）という大工道具がある．このほかにも３等分のための何種類かの道具が考えられている．

何か問題を解決しようとするときに大切なのは，今自分が置かれている立場とか，周囲の状態がどういう状況なのかを知ると言うことである．何が使えて，何が使えないのかがはっきりしていないといけない．むかし，かぐや姫だけが月に行けたのが，近い将来，誰でも行けるようになろうというのと同じ．

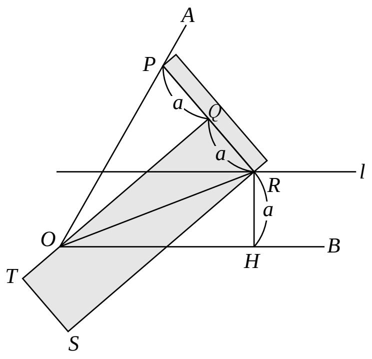


図３

2.2　３角形の内角の和は？

「3角形の内角の和は180°に決まっているではないか」と思うのは早計である．それはユークリッド幾何学の中にドップリと浸かっている人の考えである．いまや世は宇宙時代である．地球規模でいろいろなことを考えなければならない時代である．地球上に大きな３角形を考えてみよう．赤道上の東経135°の点（その子午線上に日本の標準時を決める明石がある）と東経45°の点，もう１つ北極点の3点で3角形を考えると，この3角形のどの角も90°で，これを足すと270°になってしまう．「えっ！　辺が曲線で，３角形が曲面ではないか」と思うかもしれない．

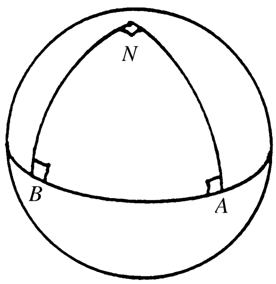


図４

地球上の２地点間を飛行機で飛ぶときの最短通路を考えてみよう．東京とサンフランシスコは緯度が大体同じなので，普通の地図（メルカトール図）で見て，だいたい赤道に平行に飛べば良いように考えがちであるが，実際はもっと北よりの航路をとる．何か遠回りをして飛んでいるように思うかもしれないが，そうではない．最短通路はその２点と地球の中心で決まる平面で地球を切ったときの切り口（大円という）の線で，地球儀で見れば了解できる．この大円を，2点を結ぶ直線とみなすと，ユークリッド幾何学の理論の基礎にある公理系の中の1つを除いて，他をすべて満たす．その１つが平行線の公理といわれるもので「1直線上にない点を通って，この直線に平行な直線は1つだけある」である．これを他の公理に置き換えた幾何学が成立することが1826年に発見された非ユークリッド幾何学である．「任意の２直線は１点で交わる（平行線がない）」に置き換えたのが上の大きな３角形の場合で，球面幾何学といわれている．われわれ地球上の生物にとってはこの幾何学の方が身近なものである（4. 補

遺　数学の公理系　を参照）.

ここでも大事なことは，基礎にあるものが何かによって，得られる結論が異なってくるということ．3角形の内角の和が180°のこともあるし，そうでないこともあり得るといった事実を認めなければならない．日常生活上でのいろいろな問題に対しても，立場の違い，経験の差などによって，結論が違ってくることは避けられないこと．人間１人１人それぞれが異なった世界を持っているということである．

さあ，頭の方はどうなってきているだろうか．少しは柔らかくなりそうだろうか．

2.3　曲線の内部か外部か？

ユークリッド幾何学とか非ユークリッド幾何学で少しほぐれかけた頭を，ここではもっともっと柔らかくしてもらう．3角形と4角形，あるいは円はここまでの幾何学では異なる図形であって，同じものではなかった．しかし，これらの図形がゴムのように伸縮自在に変形できるとしたらどうであろう．そのように考えると，図５の７つの図形はどれも同じ図形であるとみなすことができる．

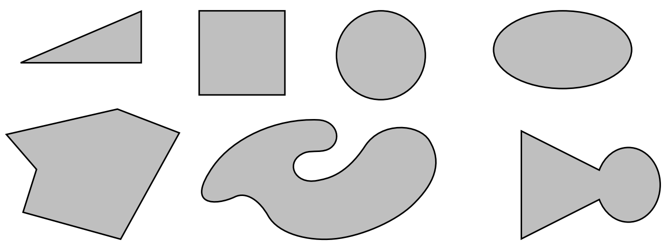


図５

このように伸び縮みのできる変形（１対１両連続な変換という）でたがいに移れる図形は位相的に同じ図形といい，それでも変わらないような図形の性質を調べようというのが，トポロジー（位相幾何学）という幾何学である．ただし，切断したり，貼り合わせたりしてはいけない．

図6の左側は単一閉曲線で，右側は結び目といわれるものの1つである．この2つの図形は位相的に異なる図形であることが証明されている．

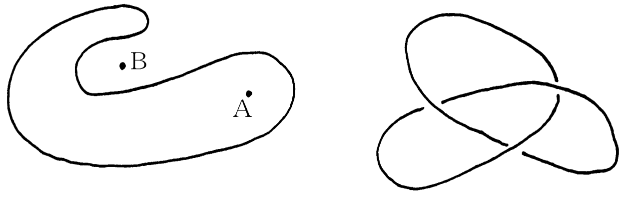


図６

単一閉曲線はその描かれている面を内部と外部の2つの部分に分ける(ジョルダンの曲線定理)．図6の単一閉曲線ではある点がその内部にあるか外部にあるかは一目で分かる．Aは内部にあり，Bは外部にある．では，つぎの図7ではどうか．A，Bはそれぞれ内か外か？　これがこんどの問題である．線は単一閉曲線である．

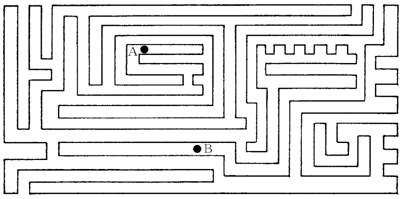


図7

どのように考えたらよいのだろうか．迷路遊びのように通路に沿って移動をしていって外にでられるかどうかを試してみますか？　この図ぐらいの複雑さならば，少していねいに移動をしていけば外にでられるかどうかの判断はできると思う．A は内部の点で，B は外部の点である．しかしもっと複雑な単一閉曲線が与えられたとき，自分の動き方がまずくて外にでられるはずなのに，でられないなどというようなことが起こるかもしれない．確実に速く判断をするにはどうしたらよいだろうか．少し考えて見よ．

1つの方法をつぎの「**2.4 オモテがあれば，ウラがある？**」の後に示す．

ここで，位相的な性質の例をすこし挙げておこう．

- オイラーの標数（オイラーの定理）

球面と位相的に同じである各種の多面体の表面，例えば，図8の正多面体とか，5角柱，7角錐など，なんでもよい．面の数 f，辺の数 e，そして，頂点の数 vを数えて，$f-e+v$ を計算するとその値は2になる．

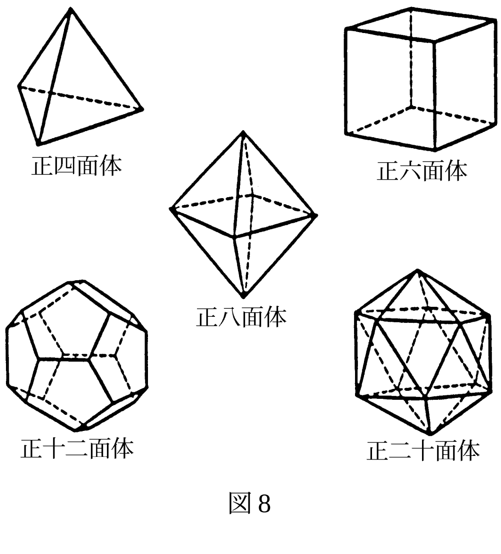


図8

ドーナツの面（トーラスという）と位相的に同じ多面体で同じように $f-e+v$ を計算するとその値は0になり，球面とトーラスは位相的に異なる図形であるということが分かる．すなわち，球面をどのように連続的に変形してもドーナツの面にはならないのである． $f-e+v$ をオイラーの標数という．

● 頭のつむじ

人の頭の毛には誰でもつむじがある．これはどうしてだろうか．少し条件が必要であるが，これは，上のオイラーの標数を使って証明することのできる位相的な性質の1つである（モースの定理）．

● 不動点定理

同じネガからプリントした四切りの写真と，L判の写真を用意して，四切りの写真の上に外にはみ出さないように，斜めでも，上下逆向きでも，勝手な位置にL判の写真を置く．このとき，四切りの写真とL判の写真の同じ位置の点が上と下でまったく重なった所にくる，そういう点が必ずある．上から針で刺すと2枚の写真の同じ位置に穴があく．ネガでいえば，その中の1つの点の所に穴があく．動かない点（不動点）が必ずあるという定理で，経済学の均衡理論などで利用される．もとはBrouwerの不動点定理，経済学では角谷の不動点定理などと呼ばれている．

2.4　オモテがあれば，ウラがある？

世の中，いろいろなものにオモテがあれば，ウラがある．物だけでなく，人の性格，事件のウラなどとさまざまなウラがある．「ウラにはウラがある」のあとのウラは必ずしもオモテではない．落語で「オモテもウラもないものを知っているか」というのがあるが，その答えはコンニャクとのこと．これでもどちらかをオモテとすればその裏がウラであり，オモテとウラがある．ここでは本当にオモテもウラもない曲面を考えよう．円板とか円柱の側面はどちらかをオモテとすれば，そのウラ側がある．オモテの点からウラの点へ面からはなれずに移動をしようと思うと，どうしてもそのフチ（境界線）を通過しないと駄目である．しかし，図9のように細長い紙の一端を180°ひねってつなぎ合わせて1つの曲面を作ると，できあがった曲面はウラもオモテもない曲面である．オモテと思う面の一点から出発して，帯に沿って移動をしていくとそのまま出発点の裏側の点まで移動をしてしまって，境界線を横切らずにすむ．どちらもオモテで同じ側にあるということである．ウラ，オモテのないこの曲面をメービウスの帯という．

ここで問題．

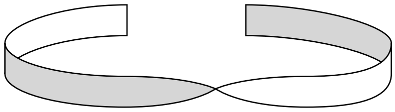
1）メービウスの帯の真ん中を切るとどのようになるか．

2）360°ひねってつなぎ合わせた帯の真ん中を切るとどのようになるか．

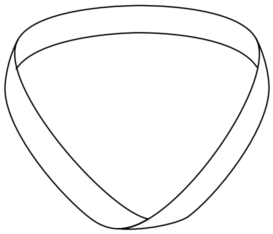
つぎの図10は細長い紙をもっと何回もひねってつなぎ合わせるときの作り方をA，B，C，Dの順序で示してある．実際に作ってどんなものができるか，楽しんでみると良い．6面6角形という．

(a)

(b)



(c)



(d)

図9

ウラ，オモテの問題の結果はつぎの通りである.

1）２つの輪ができると思ったかもしれないが，１つの輪になる.

2）２つの輪が絡んでいる.

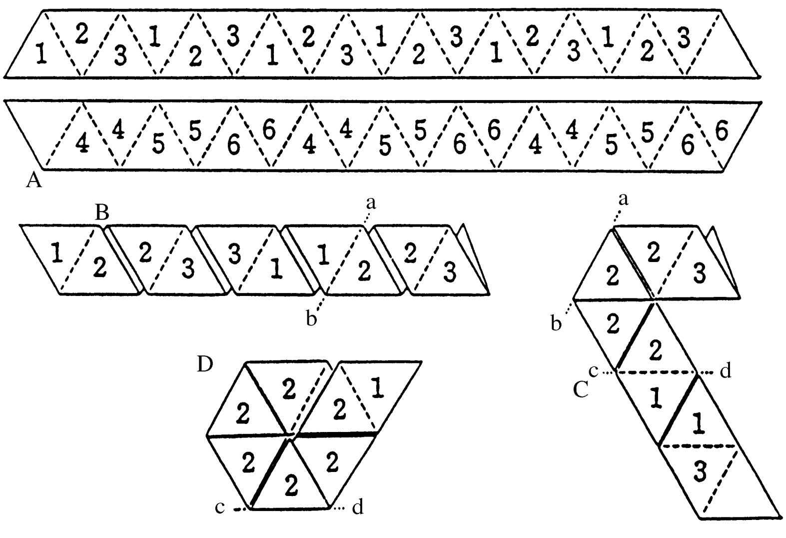


図10

ここで，「**2.3 曲線の内部か外部か？**」図７の単一閉曲線の問題の１つの解法を記す．点Ａから外へ1本の半直線を引き，問題の閉曲線と何回交わっているかを数える．この図のとき，真上に引けば，交点が5個となる．交点が奇数のとき，点Ａは内部である．点Ｂから真下に線を引けば，交点は４個である．偶数のとき，点Ｂは外部の点である．Ａ，Ｂから他のいろいろな方向へも線を引いて交点の数をかぞえてみよ．

考えるときの基本的な姿勢

- 先入観にとらわれない
- 他人からの受け売りでない
- 一人よがりの思い込みでない
- 本当にこれでよいのか？の徹底

3. 楽しんでみよう

実際にいくつかの問題を考えていくにあたって，次のようなことを念頭においておくと良い．

- いろいろと試行錯誤を繰り返し，考える
- 問題によっては解答がないかもしれない
- 解答はあっても１つとは限らない
- １つの解答でも，そこに至る道筋は１通りとは限らない

3.1 なわぬけができるか

図11の２人はお互いに縄でつながっている．縄を切ったりしないで，２人が離れられるかどうか．

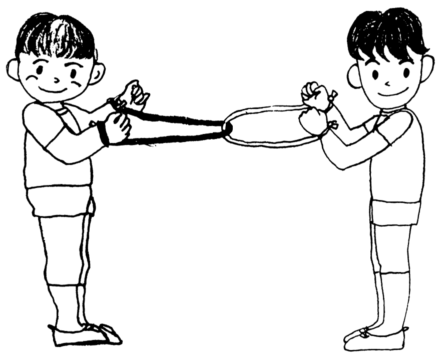


図11

図12は2つの単一閉曲線が絡んでいる．このような図をリンクという．この2つの輪ははずせないことが証明されている．図11の問題はトポロジーの基本的な考え方（2.3　曲線の内部か外部か？の伸び縮み）を利用すると分かる．

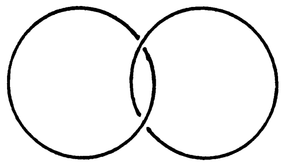


図12

3.2　ハサミがとれるか

図13のハサミをひもからはずすことができるか．ひもの端は壁に固定されている．ひもを切ったりしないこと．

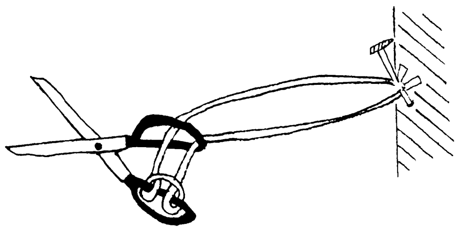


図13

図14はリンクのようであるが，絡んではいない．これならば簡単にはずせる．

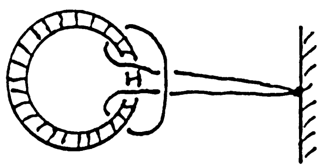


図14

3.3　線が引けるか

図15は3軒の家A，B，Cへ電気，ガス，水道を引きたいというもの，図16はAとa，Bとb，Cとcを線でつなぎたい．ただし，図15，図16のいずれも，その枠の中で交差しない線でつなげという条件付きである．

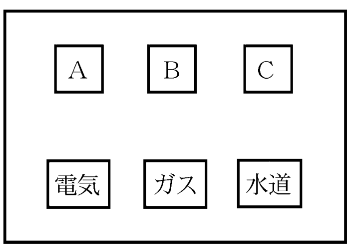


図15

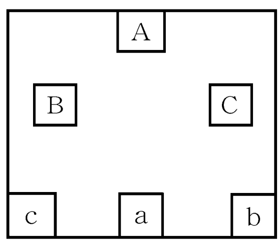


図16

3.4　橋を渡る

図17はある市の概念図である．河に7つの橋がかかっている．どこかの地区からスタートして7つの橋を1度ずつ，そして，全部渡ることができるか（昔のヨーロッパにあったケーニヒスベルクという市である．現在，カリーニングラード市という）．

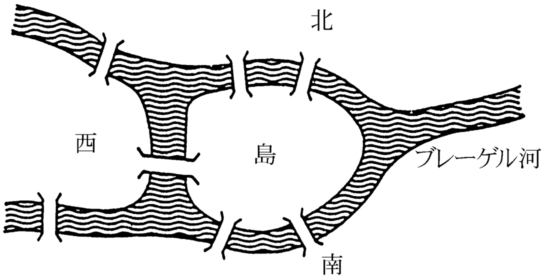


図 17

3.5　畳が敷けるか

図18は8畳の部屋を示している．斜線の部分（半畳分が2つ）は畳が敷けない所とすると，普通の7枚の畳をこの部屋に敷くことができるか．

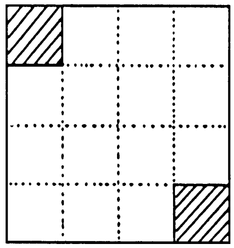


図 18

3.6　誕生日が同じ人はいるか

ある部屋に人がN人集まっている．このN人の人達の誕生日の中で，生年月日の月と日（年は別にして）が同じである人のペアがあるかどうかを考える．そのようなペアがあるという方に賭けようとするにはNがどの位の値であればよいと思うかが問題．数学的に言えば，確率が 0.5 となるのが公平な賭けで，それに近い値 N を聞いている．N がそれよりも大きければ確率が 0.5 よりも大きくなって有利となる．

4. 補　遺

4.1　無理不等式について

誤りの箇所は（1）から（2）と，（3）から（4）の部分の 2 カ所である．

◎　$a<b$ の両辺を 2 乗して $a^2<b^2$ となる

は誤りである．成り立たない例（反例という）は $a=-4, b=2$ などとしてみればよい．普通は「a, b がともに正ならば」という条件がつく．あるいはもう少し条件をゆるめて「$a+b$ が

正ならば」でもよい．つぎに

◎　$ac > bc$ の両辺を c で割って $a > b$ となる

も誤りである．反例は $c = -2, a = -3, b = 4$ などとすればよい．普通は「$c > 0$」という条件がつく．

4.2　誤答のパターン

誤答のパターンがどの位多いかの例を示す．（データは 1994 年 1 月実施の豊橋短期大学の入学試験の一部である．英語，国語との並列選択である．数学の受験者数は 54 名である．）

問題　x についての方程式 $x^2 + px + 2 = 0\ (p > 0)$ の 2 解を α, β とする．

（1）α^2, β^2 を解とする 2 次方程式は＿＿？＿＿

（2）$(1+\alpha^2)(1+\beta^2) = 17$ とすると，　$p =$＿＿？＿＿

（3）（2）のとき，（1）の解は＿＿？＿＿

（4）（2)のとき，　$\alpha^3 + \beta^3 =$＿＿？＿＿

正解は　（1）$x^2 - (p^2 - 4)x + 4 = 0$　　（2）4　　（3）$6 \pm 4\sqrt{2}$　　（4）－ 40

	正 解 数	減 点 数	白 紙 数	誤 答 数
（1）	19	22	1	12
（2）	33	2	3	16
（3）	18	1	7	28
（4）	20	6	10	18

（1）　誤答数 12 のうち，誤答の種類数 9

誤答のパターン　$x^2 + (p+2)x + 4 = 0$ (3 人),　$x^2 - 5x + 4 = 0$ (2 人),

$x^2 - px + 4 = 0$,　$x^2 + p^2x + 4 = 0$,　$x^2 - (p^2 - 4)x - 4 = 0$,

$x^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\beta)^2 = 0$,　$\left(x - p^2 - \sqrt{\cdots}\right)\cdots$,

$(x+1)(x+2)$,　$\beta = \alpha^2 + 2$

（2）　誤答数 16 のうち，誤答の種類数 13

誤答のパターン　3(3人)，　$2\sqrt{2}$ (2人)，－4，5，－1，10，16，－16，－12，　$3\sqrt{2}$，　$3 + \sqrt{6}$，

$\sqrt{6}$，$\dfrac{12}{5}$

（3） 誤答数 28 のうち，誤答の種類数 22

誤答のパターン $-2\pm\sqrt{2}$（6人），$\pm 2i$（2人），$\dfrac{\left(-2\pm\sqrt{2}\right)}{2}$，$2\pm\sqrt{2}$，

$-2\pm\sqrt{2}i$，$-4\pm\sqrt{2}$，$6\pm 3\sqrt{2}$，$7\pm 3\sqrt{5}$，$8\pm\sqrt{62}$，$\dfrac{\left(-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i\right)}{2}$，

$-3\pm\sqrt{5}$，$-5\pm\sqrt{21}$，$\dfrac{\left(-5\pm\sqrt{17}\right)}{2}$，－1，0，1，2，3，4，±8，

16，$\dfrac{2}{5}$

（4） 誤答数 18 のうち，誤答の種類数 17

誤答のパターン －56（2 人），3，10，－32，－48，60，64，－88，88，－95，

－160，－4000，±8，$-4\sqrt{2}$，$36\sqrt{2}$，$6\sqrt{6}-6$，$-p^3+8p$

4.3 数学の公理系

数学の理論構成はいくつかの公理の集まり（公理系という）から始まる．公理系に述べられたことだけを正しいもの（真）と認めて，正しい考え方（論理的推論）にしたがって，いろいろな定理を導き出す．その公理系に要求されるのは，それらがたがいに矛盾しないこと（無矛盾性），これが第1の要件である．また，できるだけ単純な公理系の方が望ましいので，どの公理も他の公理から導き出せないこと（独立性）が要求される．最小限どれだけのことを正しいものとして議論を始めるかである．そして，余分なものを極力そぎ落として得られたのが公理系である．自然数の公理系，ユークリッド空間の公理系，ベクトル空間の公理系，位相空間の公理系とか，群，環，体といった代数系の公理などたくさんがある．

ユークリッド幾何学の公理（原論では公準という）の5番目が平行線の公理といわれるもので，「1 直線上にない点を通って，この直線と平行な直線は 1 つだけある」である．この公理が他の公理から導けるのではないかという予想のもとに，それを証明しようと，19世紀になるまで，非常に多くの数学者たちが挑戦をしてきたのである．もし，その証明ができれば，ユークリッド幾何学の公理系は独立ではなく，平行線の公理をその公理系からはずすことができるのである．

1826年ロバチェフスキーが，そして，ロバチェフスキーとは無関係に，1832年ボヤイが，ともに第5公準・平行線の公理を否定して，他の公理に置き換えても矛盾がなく，ユークリッド幾何学とはちがった新しい幾何学を作ることができることを発見した．実に大変な大発見であった．それまで唯一絶対の幾何学と考えられてきたことが否定されたわけで，そのために2000年以上もの歳月が必要だったのである．これが最初の非ユークリッド幾何学で，双曲型非ユークリッド幾何学と呼ばれる．この幾何学では3角形の内角の和は2直角より小さい．その結果，ユークリッド幾何学の中で，その第 5 公準が他の公理から独立であることが証明もされたわけである．

本文中の球面幾何学では 3 角形の内角の和は 2 直角より大きい．

5. 参考図書

「いろいろな幾何学」，中沢貞治，共立出版.
「ユークリッド幾何から現代幾何へ」，小林昭七，日本評論社.
「双曲幾何学入門」，中岡 稔，サイエンス社.
「非ユークリッド幾何の世界」，寺阪英孝，講談社・ブルーバックス.
「新しいトポロジー」，本間龍雄，講談社・ブルーバックス.
「トポロジー遊び」M. ストラブル，講談社・ブルーバックス.

98 年度愛知県民大学・豊橋創造大学開放講座・講義録
講義日　1998.7.4

付記　本稿は 1998 年度愛知県教育サービスセンターによる県民大学・豊橋創造大学開放講座（講座名「異分野」理解のすすめ）の中の第４回担当分のもので，受講者に配布したそのままのものである．なお，受講者には本稿のほかにつぎを追加，配布した．３章楽しんでみようの６つの問題のほかに補充問題3題と，これら９つの問題の解答例．４章補遺の数学の公理系についての，より詳しい解説.