Bulletin of Toyohashi Sozo College
1998, No. 2, 139–144

人口予測の数学モデル

Ⅱ．生命表と生存曲線

稲 田 充 男

キーワード：人口, 待ち時間, モデル

1. はじめに

生物の個体数は限りなく増加するように見えて, やがて進行する資源の枯渇とともに減少へと転じる．環境収容力はこの上限をその生物の個体数で示したものである．環境収容力という概念は, そもそも人口に上限があるというマルサスの直感に現れていた. すなわち, 環境には制限があり, 密度（個体数, 人口）が無限に増加することはありえない．環境に制限があると, 密度が増加すると, それ以上の密度増加にマイナスになる現象が現れ, 増加が止まったり, 減少が始まったりする. 密度効果である. この密度効果を考慮し, 一番簡単な形で誘導されたモデルが, 前報で示したロジスティックモデルである.

ロジスティックモデルは時間について単調増加で, 変曲点通過後, 飽和密度に漸近する, いわゆるS字型の曲線（シグモイド）である．パールらは, 1920年までの世界人口の動きをロジスティックモデルにあてはめ, 上限値として2100年の26億4550万人と計算した．しかし, 第二次世界大戦後の人口爆発によってこの予測はあっさり裏切られた．その原因は医学の進歩などで瞬間死亡率が減り, 内的自然増加率が上がってしまったためである.

よって, 人口予測が適切に行えるかどうかは, 上記の環境収容力と内的自然増加率を正確に把握できるかどうかが, 最重要課題となる. 環境収容力については, 前報の単位人口の平均食糧消費量と, 単位面積当たりの食糧生産量を基準にして算定する可容人口という考え方などから推定する. 一方, 内的自然増加率の算定基礎として, 生命表と生存曲線がある. 生命表とは, 生物の個体群において, 生まれた個体が成長しながら次第に死亡し, 減少してゆく状況を整理してまとめた表である．また, 生存曲線とは, 種個体群の構成員が時間とともに死亡して, 生存個体数が減少してゆく状況を示した曲線である. 本論では, これらの沿革, 仕様などを概観し, 今後の理論的考察をすすめるための手だてとして, 確率過程における混合型マルコフ過程を応用し, 生存曲線モデル（寿命モデル）を誘導する.

2. 生命表の沿革と定義

生命表の最古のものはすでに紀元3世紀中頃ローマにおいて作られたといわれている．近代的方式でつくられたものとしては, 17世紀のJ. Grauntの生命表, E. Halleyの表などがある．その後いくつかの生命表が作られたが, その中で特に有名なものとしては生命保険事業の基礎として初めて用いられたR. Price の表（1735～80年），人口動態と人口静態の両者の統計を用いて作成されたMilneの表（1779～87年）がある．わが国では，小林和正の「1812～15年の一農村の生命表」，藤沢利喜太郎の国民生命表（1881～87年）がある．官庁によるものは第1回（1891～98年）より始まる．さらに厚生省ではこれとは別に簡易生命表を1945年以来毎年次について，また厚生省人口問題研究所では1947年以来，毎年4月から翌年3月に至る毎年度に対し作成している. 生命表は生命保険事業の産物であるが, その応用は保険掛金の計算に限らず, 人口学者のみならず, 医学者, 動物学者, 工場技術者その他の分野の研究者に有用な道具となっている.

生命表には, その作成方法により, 2つの型がある．ある特定の期間内に出生した男または女の10万人の集団（同時出生集団，コーホート）が1歳年をとるごとに何人が死亡し，ついにゼロになるまでの経過を表示したものが生命表である. 同時出生集団という趣旨からすれば, 対象一人一人が何歳で死ぬかを追跡法（縦断的方法）で調べなければならないわけであるが, 対象全員が死亡するまで追跡することは, 長期間を要したいへん不便である. そこで年齢別の死亡率として，現在の1年間の各年齢の死亡率を同時観察（横断的方法）によって調べ代替する．追跡法によるものをコーホート生命表と呼び, 同時観察によるものを同時生命表と呼ぶ. 死亡の起こり方が一定不変であれば, コーホート生命表と同時生命表はまったく一致するが, 観察時点における社会的状況の変化が死亡に対して影響を与えるから, 両者が一致する保証はない.

3. 生命表の仕様

生命表に含まれる主な項目は，齢，死亡率，生存数，死亡数，定常人口，定常人口総数，平均余命である.

齢 x：出生齢を0とし，年齢，月齢，日齢などで齢のすすみをあらわす．国勢調査が行われた年の精密な資料に基づいて作成される完全生命表では, 生命関数が年齢各歳別に, また乳児期ではこれが日齢, 週齢, 月齢別に表示される．種々の目的のため短時間に作成される簡易生命表では，年齢別表示が一般的である.

死亡率 ${}_nq_x$：ちょうど x 歳に達した者が $x+n$ 歳に達しないで死亡する確率を，年齢階級 $[x, x+n)$ における死亡率という．${}_nq_x$ を x 歳の死亡率という.

生存数 l_x：10万人の出生者が，上記の死亡率に従って死亡減少していくと考えた場合，x 歳に達するまで生き残ると期待される者の数を x 歳における生存数という.

死亡数 d_x：x 歳における生存数 l_x 人のうち，$x+n$ 歳に達しないで死亡すると期待される者の数を年齢階級 $[x, x+n)$ における死亡数という．d_x を x 歳における死亡数という．

定常人口 ${}_nL_x$，定常人口総数 T_x：x 歳における生存数 l_x 人について，これらの各々が x 歳から $x+n$ 歳に達するまでの間に生存する年数の和，または，常に10万人の出生があって，これらの者が上記の死亡率に従って死亡すると仮定すると究極において一定の人口集団が得られるが，その集団の x 歳以上 $x+n$ 歳未満の人口を，年齢階級 $[x, x+n)$ における定常人口という．さらに，x 歳における生存数 l_x 人について，これらの各々が x 歳以後死亡に至るまでの間に生存する年数の和，または上記の人口集団の x 歳以上の人口を，x 歳以上の定常人口総数といい T_x で表す。

平均余命：x 歳における生存数 l_x 人について，これらの者が x 歳以後に生存する年数の平均を x 歳における平均余命という．

4. 生存曲線の概要

生命表より，横軸に齢 x，縦軸に生存数 l_x をとりプロットすると，種個体群の構成員が時間とともに死亡し，生存個体数が減少してゆく状況を示した曲線が描ける．これが生存曲線である．生存曲線は対象とする生物の死んでゆく様子を反映している．もちろん同じ種でも発生の大小，災厄の有無などでその形が変化するが，ある種の生存曲線は概ね生活の仕方を反映し，それぞれ特徴を持っている．

生存曲線の形は，対数グラフにするとおおよそL字形，右下がり直線，逆L字形の3種類に分かれる．この違いはどの時期に死亡率が高いかという生物の生活史特性と関係しており，一般に魚や両生類など産んだ卵を保護しない種では，子どものときの死亡率が高いL字形になる．哺乳類など親が子を保護する種では，子どもの死亡率が低く老年になるまで生存する割合の高い逆L字形になる．鳥などでは一定の率で死亡し，中間の右下がり直線になる．ほぼ産卵（子）数の減少とともにL字形→右下がり直線→逆L字形と変わる．生物には種固有の寿命があり，生存曲線はその寿命を表すモデルであると考えられる．

生命表，生存曲線作成には，出生数，死亡数などの資料より直接計算できる．計算プログラムさえあれば煩雑な計算も容易である．ただし，人口統計が十分でない地域では，よりよい人口資料を推計するためのモデルが必要である．

寿命を決定する因子には，遺伝などの内因，環境などの外因が考えられる．ここではそれらを個々に単純化し「生体には何らかの時限装置のようなものが仕掛けられていて，ある年齢に達するまでには出現しない」と仮定し，「寿命（分布）とは出現までの待ち時間（分布）」とみなし，生存曲線モデル誘導を試みる．

5. 生存曲線モデルの誘導

機械の重要な部品が一定の限界まで磨耗したときに，機械の寿命が尽きるのと同じように，

生物の寿命も, 種々固有の寿命があり, あらかじめ設定されたカウント数に達すると死を迎えると考えることができる．誕生した個体が, ちょうど x 歳で死亡する確率に注目すると, これは誕生した個体が死亡するまでの待ち時間として考えられる．

死亡条件のカウント数を k で表わし, 離散量とする．年齢を x で表わし, 連続量とする．年齢 $(x, x+dx)$ の間にカウント数 k のものが $k+1$ 以上になる確率を $p(k\,;t)dx+0(dx)$ とする．$0(dx)$ は $k+2$ 以上になる確率であり, その大きさは dx より小さいオーダーである．

ここで, $f(k\,;x)$ を年齢 x においてカウント数 k のものが存在する確率であるとすると,

$$f(k\,;x+dx)=\{1-p(k\,;x)dx\}f(k\,;x)+p(k-1\,;x)dxf(k-1\,;x)+0(dx)$$

$$\therefore\ \{f(k\,;x+dx)-f(k\,;x)\}/dx=-p(k\,;x)f(k\,;x)+p(k-1\,;x)f(k-1\,;x)+0(dx)/dx$$

$dx\to 0$ とすれば,

$$f'(k\,;x)=-p(k\,;x)f(k\,;x)+p(k-1\,;x)f(k-1\,;x)\qquad (k=1, 2, \cdots)$$

となる．初期条件を

$$f(0\,;0)=1,\quad f(k\,;0)=0\qquad (k=1, 2, \cdots)$$

とすれば, $k=0$ のとき第 2 項がなくなり,

$$f'(0\,;x)=-p(0\,;x)f(0\,;x)$$

となる．これがカウント数分布 $f(k\,;x)$ を決める方程式である．この方程式は $p(k\,;x)$ を与えれば, $k=0, 1, 2, \cdots$ と順次解いていくことができる．

$f(k\,;x)$ は年齢 x までにカウント数が k 以上になる確率である．次に $(x, x+dx)$ 時間以内にカウント数がちょうど k になる確率 $F(k\,;x)$ を求める．死亡条件のカウント数の増え方を排反な 2 つの場合に分けて,

（1）$(0, x)$ に $k-1$ になっていて, $(x, x+dx)$ に k になる場合．

（2）i を 2 より大きな任意の値として, $(0, x)$ に $k-i$ になっていて, $(x, x+dx)$ に k になる場合．

とすると,（1）の場合の確率は,

$$f(k-1\,;x)\{p(k-1\,;x)dx+0(dx)\}$$

に等しく, また（2）の場合の確率は,

$$f(k-2\,;x)\{p(k-2\,;x)dx+0(dx)\}^2+f(k-3\,;x)\{p(k-3\,;x)dx+0(dx)\}^3+\cdots$$

となり, 後の値は dx が限りなく小さなときには, 無視することができるから,

$$F(k\,;x)=f(k-1\,;x)p(k-1\,;x)$$

となる．

$p(k\,;x)$ は年齢 x におけるカウント数 k の増加率を表わしていると考えられる．カウント数の増加率について, ここでは形式的に,（Ⅰ）増加率一定,（Ⅱ）年齢のみの関数,（Ⅲ）カウント数のみの関数の 3 つの場合について考察する．

（Ⅰ）増加率一定　　$p(k\,;x)=M$

増加率 $p(k\,;x)$ は年齢, カウント数に無関係で一定である．この場合, $f(k\,;x)$ の方程式は,

$$f'(k\,;x)=-Mf(k\,;x)+Mf(k-1\,;x)\qquad (k=1, 2, \cdots)$$

$$f'(0\,;x)=-Mf(0\,;x)$$

$$f(0\,;0)=1,\quad f(k\,;0)=0\qquad (k=1, 2, \cdots)$$

となる．これを解くと,

$$f(k\,;x) = (Mx)^k \exp(-Mx)/k!$$

$$F(k\,;x) = M(Mx)^{k-1} \exp(-Mx)/(k-1)!$$

となる．

（Ⅱ）年齢のみの関数　　$p(k\,;x) = Nc\exp(-cx)$

増加率 $p(k\,;x)$ として，単分子反応の成長速度関数を応用し，年齢のみの関数を用いる．この場合，$f(k\,;x)$ の方程式は,

$$f'(k\,;x) = -Nc\exp(-cx)f(k\,;x)+Nc\exp(-cx)f(k-1\,;x) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f'(0\,;x) = -Nc\exp(-cx)f(0\,;x)$$

$$f(0\,;0) = 1, \quad f(k\,;0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

となる．これを解くと,

$$f(k\,;x) = [N\{1-\exp(-cx)\}]^k \exp[-N\{1-\exp(-cx)\}]/k!$$

$$F(k\,;x) = [N\{1-\exp(-cx)\}]^{k-1} \exp[-N\{1-\exp(-cx)\}]/(k-1)!$$

となる．

（Ⅲ）カウント数のみの関数　　$p(k\,;x) = c(N-k)$

増加率 $p(k\,;x)$ として（Ⅱ）同様単分子反応の成長速度関数を応用する．ただし，年齢ではなくカウント数のみの関数とする．この場合，この場合，$f(k\,;x)$ の方程式は,

$$f'(k\,;x) = -c(N-k)f(k\,;x)+c(N-k+1)f(k-1\,;x) \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$f'(0\,;x) = -cNf(0\,;x)$$

$$f(0\,;0) = 1, \quad f(k\,;0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

となる．これを解くと,

$$f(k\,;x) = N!c\{\exp(-cx)\}^{N-k}\{1-\exp(-cx)\}^k/\{k!(N-k)!\}$$

$$F(k\,;x) = N!c\{\exp(-cx)\}^{N-k+1}\{1-\exp(-cx)\}^{k-1}/\{(k-1)!(N-k)!\}$$

となる．

以上，3種の場合について生存曲線モデルを誘導した．これらのモデルの特性などについては，次報以降，順次報告する．

6. おわりに

人口は基本的に出生で増え，死亡で減る．こうした出生，死亡の発生は，一見まったく偶発的な現象に見えるが，適当な統計的方法による観察を加えると，ある種の法則性をかなり鮮明に見出すことができる．この意味において，生存曲線について，確率過程論を応用し，理論的に研究することは意義深い．本論ではまったく形式的ではあるが，生存曲線モデルを待ち時間の分布として導いた．これらのモデルが，出生から死亡への過程に潜在する規則を理論的に解明する上で，有効であるかどうか不明である．今後この点を検討することはもちろん，安定人口，出生，死亡，年齢構造相互間の均衡など人口の自己再生産の概念について明確にする必要がある．

参考文献

伊藤嘉昭　1994,『生態学と社会──経済・社会系学生のための生態学入門』東海大学出版会.
古川俊之　1976,『寿命モデル』数理科学 151.
南条善治　1978,『生命表の理論と実際』数理科学 176.
鈴木太七　1961,『木材の生産予測について』科学技術庁資源局.
鈴木太七　1963,『木材の生産予測について（Ⅱ）』科学技術庁資源局.
山岸　宏　1977,『成長の生物学』講談社.